

文章编号: 1000-8055(2005)06-0905-05

多元正态分布整体推断方法

傅惠民

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100083)

摘要: 提出多元正态分布整体推断方法。通过仿真结果与试验数据有机结合, 该方法能够将多个不同状态下的多变量(多指标)的试验数据作为一个整体进行统计分析, 给出多元正态分布均值和协方差矩阵的整体估计。文中详细讨论了多个状态下二元正态分布均值和方差的无偏估计和置信区间估计。与传统方法相比, 该方法不但具有更高的精度, 而且解决了一种状态下只有一个试验数据时多变量(多指标)产品可靠性评定的难题。此外, 文中还给出一种均值和方差仿真结果的极小子样检验方法。

关键词: 航空、航天推进系统; 多元正态分布; 小子样; 整体估计; 可靠性; 仿真

中图分类号: TB301; O211 **文献标识码:** A

Integral Inference Method for Multivariate Normal Distributions

FU Huimin

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: An integral inference method for multivariate normal distributions is presented. Combining the simulation results and the experiment data, it can totally infer the experiment data of the multivariate normal distributions in multi-state. Then it can establish the estimators of means and covariance matrix of the multivariate normal distribution, and estimate their confidence limits and intervals in each state. Compared with traditional methods, this method not only has higher precision but also solves the problem of reliability assessment with only one experiment datum of the multivariate normal distribution in a state. Besides, a method for testing simulation results of means and variances in multi-state is also presented with very small sample.

Key words: aerospace propulsion system; multivariate normal distribution; small sample; integral estimate; reliability; simulation

产品极小子样可靠性评定是当前亟待解决的一个难题, 文献[1]针对一元正态分布完全数据和指数分布截尾数据, 建立了极小子样可靠性评定方法; 文献[2]给出正态分布、极值分布和Weibull分布等位置-尺度分布族截尾数据和不完全数据的整体估计方法。在此基础上, 本文进一步提出多

元正态分布整体推断方法, 可以对多变量(多指标)的产品进行极小子样可靠性评定。

1 二元正态分布试验数据整体推断

1.1 整体分布参数估计

设在第 i 个状态下取 n_i 个试样进行独立试

收稿日期: 2005-07-11; 修订日期: 2005-10-18

基金项目: 北京市重点学科工程力学项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956—), 男, 浙江遂昌人, 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系“长江学者”特聘教授, 博士, 从事时间序列分析方法、先进信号处理技术、数据融合方法及小样本可靠性技术研究

验, 试验值 $(X_{ij}, Y_{ij}), j = 1, 2, \dots, n_i$, 服从二元正态分布:

$$f_i(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{xi}\sigma_{yi}\sqrt{1-\rho_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_i^2)} \times \left[\frac{(x-\mu_{xi})^2}{\sigma_{xi}^2} + \frac{(y-\mu_{yi})^2}{\sigma_{yi}^2} - 2\rho_i \frac{(x-\mu_{xi})(y-\mu_{yi})}{\sigma_{xi}\sigma_{yi}}\right]\right\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

式中:

$$\mu_{xi} = k_{xi} \mu_x \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$\sigma_{xi} = l_{xi} \sigma_x \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$$\mu_{yi} = k_{yi} \mu_y \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$\sigma_{yi} = l_{yi} \sigma_y \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$C_{xyi} = c_i C_{xy} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

$$\rho_i = \frac{C_{xyi}}{\sigma_{xi}\sigma_{yi}} = \frac{c_i}{l_{xi}l_{yi}} \frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

其中 $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ 和 C_{xy} 为整体分布参数, 它们均未知。 $k_{xi}, k_{yi}, l_{xi}, l_{yi}$ 和 $c_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 分别被称为均值系数、标准差系数和协方差系数, 它们可由仿真、数字化设计等方法求得, 为了便于工程应用, 可将试验次数较多或要着重考虑的某一状态所对应的 $k_{xi}, k_{yi}, l_{xi}, l_{yi}$ 和 c_i 取为 1。

可以证明, 整体分布参数 $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ 和 C_{xy} 的无偏估计量分别为:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{xi} X_{ij}}{l_{xi}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2}} \quad (8)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{yi} Y_{ij}}{l_{yi}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{yi}^2}{l_{yi}^2}} \quad (9)$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{l_{xi}^2} (X_{ij} - k_{xi} \bar{X})^2 \quad (10)$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{l_{yi}^2} (Y_{ij} - k_{yi} \bar{Y})^2 \quad (11)$$

$$\hat{C}_{xy} = \frac{1}{n_{xy}} \times$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{c_i} (X_{ij} - k_{xi} \bar{X}) (Y_{ij} - k_{yi} \bar{Y}) \quad (12)$$

$$n = \sum_{i=1}^m n_i \quad (13)$$

$$n_{xy} = n - 2 + \frac{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi} k_{yi}}{c_i} \sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi} k_{yi} c_i}{l_{xi}^2 l_{yi}^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2} \sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{yi}^2}{l_{yi}^2}}$$

可以证明:

$$\bar{X} \sim N\left[\mu_x, \sigma_x^2 \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2}\right)^{-1}\right] \quad (15)$$

$$\bar{Y} \sim N\left[\mu_y, \sigma_y^2 \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{yi}^2}{l_{yi}^2}\right)^{-1}\right] \quad (16)$$

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (17)$$

$$\frac{(n-1)S_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (18)$$

由此可知, 整体分布参数 μ_x, μ_y 和 σ_x, σ_y 的置信水平为 γ 的置信区间分别为:

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)S_x \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2}\right)^{-1/2} \leq \mu_x \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)S_x \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2}\right)^{-1/2} \quad (19)$$

$$\bar{Y} - t_{\alpha/2}(n-1)S_y \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{yi}^2}{l_{yi}^2}\right)^{-1/2} \leq \mu_y \leq \bar{Y} + t_{\alpha/2}(n-1)S_y \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{yi}^2}{l_{yi}^2}\right)^{-1/2} \quad (20)$$

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \quad (21)$$

$$\frac{(n-1)S_y^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \leq \sigma_y^2 \leq \frac{(n-1)S_y^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \quad (22)$$

式中: $\alpha = 1 - \gamma, P\{t \geq t_{\alpha}(n-1)\} = \alpha, P\{\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)\} = \alpha$

1.2 各个状态均值、方差和协方差估计

第 i 个状态下母体均值、方差和协方差 $\mu_{xi}, \mu_{yi}, \sigma_{xi}, \sigma_{yi}$ 和 C_{xyi} 的无偏估计量分别为:

$$\bar{X}_i = k_{xi} \bar{X} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (23)$$

$$\bar{Y}_i = k_{yi} \bar{Y} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

$$S_{xi}^2 = l_{xi}^2 S_x^2 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

$$S_{yi}^2 = l_{yi}^2 S_y^2 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$$\hat{C}_{xyi} = c_i \hat{C}_{xy} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (27)$$

且有

$$\bar{X}_i \sim N\left[\mu_{xi}, k_{xi}^2 \sigma_x^2 \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{xi}^2}{l_{xi}^2}\right)^{-1}\right] \quad (28)$$

$$\bar{Y}_i \sim N \left[\mu_{Y_i}, k_{Y_i}^2 \sigma_{Y_i}^2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{n_j k_{Y_j}^2}{l_{Y_j}^2} \right)^{-1} \right] \quad (29)$$

$$\frac{(n-1)S_{X_i}^2}{\sigma_{X_i}^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (30)$$

$$\frac{(n-1)S_{Y_i}^2}{\sigma_{Y_i}^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (31)$$

因此, 可以求得第 i 个状态下母体均值 μ_{X_i} , μ_{Y_i} 和方差 σ_{X_i} , σ_{Y_i} 的置信水平为 γ 的置信区间。

1.3 各个状态的落入概率计算

第 i 个状态下二维随机变量 (X_i, Y_i) 位于区域 Ω 内的概率 P_i 的估计量由下式计算:

$$\hat{P}_i = \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\sigma_{X_i}\sigma_{Y_i}\sqrt{1-\hat{\rho}_i^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\hat{\rho}_i^2)} \left[\frac{(x-\bar{X})^2}{S_{X_i}^2} + \frac{(y-\bar{Y})^2}{S_{Y_i}^2} - \frac{2\hat{\rho}_i(x-\bar{X})(y-\bar{Y})}{S_{X_i}S_{Y_i}} \right] \right\} dx dy$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (32)$$

式中:

$$\hat{\rho}_i = \frac{\hat{C}_{X_i Y_i}}{S_{X_i} S_{Y_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (33)$$

当 X_i 和 Y_i 相互独立时, 有:

$$\hat{P}_i = \iint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\sigma_{X_i}\sigma_{Y_i}} \times \exp \left\{ -\frac{(x-\bar{X})^2}{2S_{X_i}^2} - \frac{(y-\bar{Y})^2}{2S_{Y_i}^2} \right\} dx dy$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (34)$$

当 X_i 和 Y_i 相互独立, 且 $\Omega = [a \leq X_i \leq b; c \leq Y_i \leq d]$ 时, 有:

$$\hat{P}_i = \left[\Phi \left(\frac{b-\bar{X}_i}{S_{X_i}} \right) - \Phi \left(\frac{a-\bar{X}_i}{S_{X_i}} \right) \right] \times \left[\Phi \left(\frac{d-\bar{Y}_i}{S_{Y_i}} \right) - \Phi \left(\frac{c-\bar{Y}_i}{S_{Y_i}} \right) \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (35)$$

2 仿真结果极小子样检验方法

对于各个状态都是成组试验数据的情况可采用文献[1~4]方法进行检验。下面分别针对一些状态只有一个试验数据, 而另一些状态是成组试验数据的情况, 以及所有状态都只有一个试验数据的情况, 给出仿真结果检验方法。

2.1 成组和单点试验数据混合的情况

设第 i 个状态下有 n_i 个试验数据 (X_{ij}, Y_{ij}) ,

且有 $X_{ij} \sim N(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2)$, $Y_{ij} \sim N(\mu_{Y_i}, \sigma_{Y_i}^2)$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, 其中当 $i = 1, 2, \dots, q$ 时, $n_i = 1$; 当 $i = q+1, q+2, \dots, m$ 时, $n_i \geq 2$ 。并设 μ'_{X_i} 和 σ'_{X_i} 为 μ_{X_i} 和 σ_{X_i} 的仿真结果, μ'_{Y_i} 和 σ'_{Y_i} 为 μ_{Y_i} 和 σ_{Y_i} 的仿真结果, $i = 1, 2, \dots, m$ 。当仿真结果正确时, 有:

$$\mu'_{X_i} = \mu_{X_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (36)$$

$$\sigma'_{X_i} = \sigma_{X_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (37)$$

$$\mu'_{Y_i} = \mu_{Y_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

$$\sigma'_{Y_i} = \sigma_{Y_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (39)$$

此时, 由 $k_{X_i} = \mu'_{X_i}/\mu_{X_i}$, $l_{X_i} = \sigma'_{X_i}/\sigma_{X_i}$ 和 $k_{Y_i} = \mu'_{Y_i}/\mu_{Y_i}$, $l_{Y_i} = \sigma'_{Y_i}/\sigma_{Y_i}$ 求得的均值系数和标准差系数也正确, 其中 μ'_{X_i} , σ'_{X_i} 和 μ'_{Y_i} , σ'_{Y_i} 分别是将 k_{X_i} , l_{X_i} 和 k_{Y_i} , l_{Y_i} 取为 1 的那个状态的均值和标准差仿真结果。令:

$$S_{X_i}^2 = \left(\frac{X_{i1} - \mu'_{X_i}}{\sigma'_{X_i}} \right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (40)$$

$$S_{X_i}^2 = \frac{1}{(n_i - 1)(\sigma'_{X_i})^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X})^2$$

$$i = q+1, q+2, \dots, m \quad (41)$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n - m + q} \times$$

$$\left[\sum_{i=1}^q S_{X_i}^2 + \sum_{i=q+1}^m (n_i - 1) S_{X_i}^2 \right] \quad (42)$$

$$S_{Y_i}^2 = \left(\frac{Y_{i1} - \mu'_{Y_i}}{\sigma'_{Y_i}} \right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (43)$$

$$S_{Y_i}^2 = \frac{1}{(n_i - 1)(\sigma'_{Y_i})^2} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$i = q+1, q+2, \dots, m \quad (44)$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n - m + q} \left[\sum_{i=1}^q S_{Y_i}^2 + \sum_{i=q+1}^m (n_i - 1) S_{Y_i}^2 \right] \quad (45)$$

式中:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad i = q+1, q+2, \dots, m \quad (46)$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad i = q+1, q+2, \dots, m \quad (47)$$

$$n = \sum_{i=1}^m n_i \quad (48)$$

则可以证明, 当仿真结果 μ'_{X_i} 和 σ'_{X_i} 正确时, 有:

$$\chi_{m-1}^2 = \frac{1}{C} \left[(n - m + q) \ln S_X^2 - \sum_{i=1}^q \ln S_{X_i}^2 - \sum_{i=q+1}^m (n_i - 1) \ln S_{X_i}^2 \right] \sim \chi^2(m-1) \quad (49)$$

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{X_{ij} - \mu'_{xi}}{\sigma'_{xi}} \right)^2 \sim \chi^2(n) \quad (50)$$

式中 C 为修正系数:

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \times \left(q + \sum_{i=q+1}^m \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-m+q} \right) \quad (51)$$

因此,在显著性水平 α 下,式(36)和(37)的拒绝域为:

$$\chi^2_m \geq \chi^2_{\alpha}(m-1) \quad (52)$$

$$\text{或 } \chi^2_n \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{ 或 } \chi^2_n \geq \chi^2_{\alpha/2}(n) \quad (53)$$

当式(52)或(53)成立时,可以断定 μ_{xi} 和 σ_{xi} 的仿真结果 μ'_{xi} 和 σ'_{xi} ($i=1, 2, \dots, m$) 不正确,即拒绝式(36)和(37)。

同样,当仿真结果 μ'_{yi} 和 σ'_{yi} 正确时,有:

$$\chi^2_m = \frac{1}{C} \left[(n-m+q) \ln S_Y^2 - \sum_{i=q+1}^m \ln S_{Yi}^2 - \sum_{i=q+1}^m (n_i-1) \ln S_{Yi}^2 \right] \sim \chi^2(m-1) \quad (54)$$

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{Y_{ij} - \mu'_{yi}}{\sigma'_{yi}} \right)^2 \sim \chi^2(n) \quad (55)$$

所以,在显著性水平 α 下,式(38)和(39)的拒绝域为:

$$\chi^2_m \geq \chi^2_{\alpha}(m-1) \quad (56)$$

$$\text{或 } \chi^2_n \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{ 或 } \chi^2_n \geq \chi^2_{\alpha/2}(n) \quad (57)$$

当式(56)或(57)成立时,可以断定 μ_{yi} 和 σ_{yi} 的仿真结果 μ'_{yi} 和 σ'_{yi} ($i=1, 2, \dots, m$) 不正确,即拒绝式(38)和(39)。

对于各个状态方差或变异系数相等的情况,可以分别采用文献[3]和[4]方法进行检验。

2.2 单点试验数据的情况

设第 i 个状态下只有一个试验数据 (X_{i1}, Y_{i1}) , 且有 $X_{i1} \sim N(\mu_{xi}, \sigma_{xi}^2)$, $Y_{i1} \sim N(\mu_{yi}, \sigma_{yi}^2)$, $i=1, 2, \dots, m$ 。令:

$$S_{X_i}^2 = \left(\frac{X_{i1} - \mu'_{xi}}{\sigma'_{xi}} \right)^2 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (58)$$

$$S_X^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{X_i}^2 \quad (59)$$

$$S_{Y_i}^2 = \left(\frac{Y_{i1} - \mu'_{yi}}{\sigma'_{yi}} \right)^2 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (60)$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{Y_i}^2 \quad (61)$$

则可以证明,当仿真结果 μ'_{xi} 和 σ'_{xi} 正确时,有:

$$\chi^2_m = \frac{3m}{4m+1} \times$$

$$\left(m \ln S_X^2 - \sum_{i=1}^m \ln S_{X_i}^2 \right) \sim \chi^2(m-1) \quad (62)$$

$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{X_{i1} - \mu'_{xi}}{\sigma'_{xi}} \right)^2 \sim \chi^2(m) \quad (63)$$

因此,在显著性水平 α 下,式(36)和(37)的拒绝域为:

$$\chi^2_m \geq \chi^2_{\alpha}(m-1) \quad (64)$$

$$\text{或 } \chi^2_0 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(m) \text{ 或 } \chi^2_0 \geq \chi^2_{\alpha/2}(m) \quad (65)$$

即当式(64)或(65)成立时,可以断定 μ_{xi} 和 σ_{xi} 的仿真结果 μ'_{xi} 和 σ'_{xi} ($i=1, 2, \dots, m$) 不正确。

同样,当仿真结果 μ'_{yi} 和 σ'_{yi} 正确时,有:

$$\chi^2_m = \frac{3m}{4m+1} \times$$

$$\left(m \ln S_Y^2 - \sum_{i=1}^m \ln S_{Y_i}^2 \right) \sim \chi^2(m-1) \quad (66)$$

$$\chi^2_0 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{Y_{i1} - \mu'_{yi}}{\sigma'_{yi}} \right)^2 \sim \chi^2(m) \quad (67)$$

因此,在显著性水平 α 下,式(38)和(39)的拒绝域为:

$$\chi^2_m \geq \chi^2_{\alpha}(m-1) \quad (68)$$

$$\text{或 } \chi^2_0 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(m) \text{ 或 } \chi^2_0 \geq \chi^2_{\alpha/2}(m) \quad (69)$$

即当式(68)或(69)成立时,可以断定 μ_{yi} 和 σ_{yi} 的仿真结果 μ'_{yi} 和 σ'_{yi} ($i=1, 2, \dots, m$) 不正确。

3 多元正态分布试验数据整体推断

设在第 i 个状态下随机变量 $X_i = (X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi})^T$ 服从多元正态分布^[5]:

$$f_i(x_i) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det C_i)^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_i - \mu_i)^T C_i^{-1} (x_i - \mu_i) \right\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (70)$$

式中 $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})^T$, $\mu_i = (\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{pi})^T$, 协方差矩阵 $C_i = \text{Cov}(X_i) = (C_{j_1 j_2 i})_{p \times p}$ 并设:

$$\mu_{j_1 i} = k_{j_1 i} \mu_{j_1}$$

$$i=1, 2, \dots, m; \quad j_1=1, 2, \dots, p \quad (71)$$

$$C_{j_1 j_2 i} = c_{j_1 j_2} C_{j_1 j_2}$$

$$i=1, 2, \dots, m; \quad j_1, j_2=1, 2, \dots, p \quad (72)$$

其中 μ_{j_1} ($j_1=1, 2, \dots, p$) 和 $C_{j_1 j_2}$ ($j_1, j_2=1, 2, \dots, p$) 为整体分布参数,它们均未知。 k_{j_1} 和 $c_{j_1 j_2}$ ($i=1, 2, \dots, m; j_1, j_2=1, 2, \dots, p$) 分别称为均值系数和协方差系数,它们可由仿真、数字化设计等方法求得,为了便于应用,可将试验次数较多的某一状态

所对应的 $k_{j_1 l}$ 和 $C_{j_1 j_2 l}(j_1, j_2 = 1, 2, \dots, p)$ 取为 1。

对于第 i 个状态下随机变量 X_i 的 n_i 个独立试验值 $X_{ij} = (X_{1ij}, X_{2ij}, \dots, X_{pij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_i$ 。那么, 整体分布参数 $\mu_{j_1}(j_1 = 1, 2, \dots, p)$ 和 $C_{j_1 j_2 l}(j_1, j_2 = 1, 2, \dots, p)$ 的无偏估计量分别为:

$$\bar{X}_l = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{li} X_{lij}}{C_{l li}}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{li}^2}{C_{l li}}} \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (73)$$

$$\hat{C}_{l li} = S_l^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{C_{l li}} \left(X_{lij} - k_{li} \bar{X}_l \right)^2 \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (74)$$

$$\hat{C}_{j_1 j_2} = \frac{1}{n_{j_1 j_2}} \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{C_{j_1 j_2 i}} \left(X_{j_1 ij} - k_{j_1 i} \bar{X}_{j_1} \right) \left(X_{j_2 ij} - k_{j_2 i} \bar{X}_{j_2} \right) \quad j_1 \neq j_2 \quad (75)$$

式中:

$$n = \sum_{i=1}^m n_i \quad (76)$$

$$n_{j_1 j_2} = n - 2 + \frac{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{j_1 i} k_{j_2 i}}{C_{j_1 j_2 i}} \sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{j_1 i} k_{j_2 i} C_{j_1 j_2 i}}{C_{j_1 j_1 i} C_{j_2 j_2 i}}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{j_1 i}^2}{C_{j_1 j_1 i}} \sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{j_2 i}^2}{C_{j_2 j_2 i}}} \quad (77)$$

可以证明:

$$\bar{X}_l \sim N \left[\mu_l, C_{l li} \left(\sum_{i=1}^m \frac{n_i k_{li}^2}{C_{l li}} \right)^{-1} \right] \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (78)$$

$$\frac{(n-1)S_l^2}{C_{l li}} \sim \chi^2(n-1) \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (79)$$

因此, 与二元正态分布情况相同, 可以对整体分布参数 μ_l 和 $C_{l li}(l = 1, 2, \dots, p)$ 以及各个状态下的均值 μ_{li} 和方差 $C_{l li}(i = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, p)$ 进行置信区间估计, 并对仿真结果进行检验, 这里不再赘述。

4 结 论

(1) 本文方法首先采用由仿真或数字化设计得到的各个状态下多元正态分布的均值、标准差和协方差, 求得均值系数(各个状态均值与某一状态均值之比)、标准差系数(各个状态标准差与某一状态标准差之比)和协方差系数(各个状态协方

差与某一状态协方差之比), 然后通过均值系数、标准差系数和协方差系数, 将各个不同状态下的试验数据转换到某一状态(该状态的 $k_{xi}, k_{yi}, l_{xi}, l_{yi}$ 和 c_i 均取为 1) 下进行统计分析, 得到该状态下的均值、标准差和协方差估计量, 再反过来给出各个不同状态下的经过试验数据修正的均值、标准差和协方差。

(2) 对于已知 $\mu_{xi} = \mu_{yi} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ 的情况, 令 $X_{ij}^* = X_{ij}/l_{xi}, Y_{ij}^* = Y_{ij}/l_{yi}$, 则有 $X_{ij}^* \sim N(0, \sigma_x^2), Y_{ij}^* \sim N(0, \sigma_y^2)$, 因此可将 X_{ij}^* (或 Y_{ij}^*), $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_i$ 看作来自同一母体的样本进行整体统计推断。此时, 第 2 节中仿真结果检验需令 $\mu_{xi}^* = \mu_{yi}^* = 0$; 也可令 $\bar{X}_i = \bar{Y}_i = 0$, 并将 $n_i - 1$ 和 $n - m + q$ 分别换成 n_i 和 $n, i = 1, 2, \dots, m$ 。若式(52)、(64)或式(56)、(68)成立, 则可以断定各个状态母体标准差之间比例的仿真结果 l_{xi} 或 l_{yi} 不正确; 若式(53)、(65)或式(57)、(69)成立, 则可以断定母体标准差仿真结果 σ_{xi}^* 或 σ_{yi}^* 不正确, $i = 1, 2, \dots, m$ 。当均值已知但不全为零时, 可先将其变换为零均值的情况再处理。

(3) 本文方法可用于靶场极小子样评定等领域。

参考文献

- [1] 傅惠民 极小子样可靠性评定方法[J]. 机械强度, 2005, 27(3): 335~338
FU Huimin Method for Reliability Assessment with Very Small Sample[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(3): 335~338
- [2] 傅惠民, 林逢春 截尾数据整体估计方法[J]. 航空动力学报, 2005, 27(4): 529~533
FU Huimin, LIN Fengchun Integral Estimate Method for Censored Data[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 27(4): 529~533
- [3] 傅惠民 异方差分析方法[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 196~201
FU Huimin Method for Heteroscedastic Analysis[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(2): 196~201
- [4] 傅惠民, 郭文娟 多因子异方差分析[J]. 航空动力学报, 2005, 27(3): 345~350
FU Huimin, GUO Wenjuan Multi-Way Heteroscedastic Analysis[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 27(3): 345~350
- [5] 盛骤, 谢式千, 潘承毅 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004
SHENG Zhou, XIE Shiqian, PAN Chengyi Probability Theory and Symbolic Statistics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004